

ファジィグラフの構造解析と応用

—連結構造解析に焦点を当てて—

新海 公昭¹ 津田 栄² 山下 元³

人間の感情や認識などの曖昧な情報は、ファジィグラフで有効に分析されるが、一般に複雑な構造をもつ。関連構造解析や類似構造解析を行うことにより、大域的な構造はかなり把握することができるようになるが、残された課題の1つに連結構造解析における系列化分析がある。筆者等は、「ファジィコアインデックス」という指標を定義し、その指標を用いた系列化分析の手法を紹介するとともに、従来から広く用いられている系列化分析の手法との差異を明らかにした。事例を通して提案手法の有効性についても考察した。

キーワード：ファジィグラフ 片連結グラフ 半順序構造 ファジィコアインデックス

1. はじめに

人間の意識構造や心理状態などの曖昧性を含む対象項目は、ファジィグラフで表現される。一般に複雑な構造をしているファジィグラフは、関連構造解析や類似構造解析により、もとの情報の特徴をかなり抽出することができる(図1)。

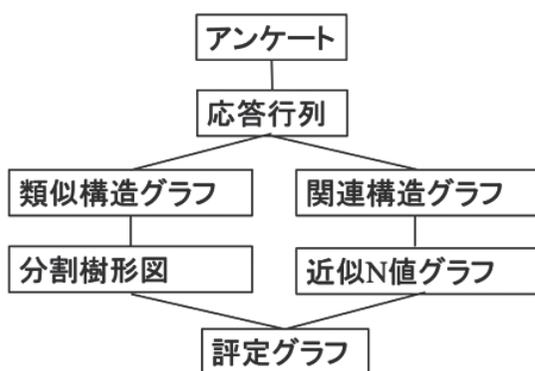


図1 ファジィグラフの構造解析手法

Yamashita (1989)¹⁾は、関連構造解析の結果として表される関連構造グラフに対して、近似アルゴリズムを提案し、近似N値グラフを提案した。また、津田、山下(1996)²⁾は、類似構造解析の結果として表される類似構造グラフにおいて、通常のシャプレイ値を拡張したファジィシャプレイ値を提案し、全体構造における強化点の存在を明らかにした。これらの貢献により、ファジィグラフ全体の構造をかなり明らかにすることができるようになった。残された課題の1つとして、ファジィグラフの連結構造解析における系列化分析に関する問題がある。ファジィグラフにおいて、ノードの系列化(順序付け)を試みると、一般に全順序ではなく半順序な構造になる場合が多い。ファジィグラフなどを用いて意思決定を行う場合は、何らかの尺度により、グラフを全順序構造に変換することが望まれる場合も多く、より詳細な系列分析が必要となる。

筆者等は、「ファジィコアインデックス」という指標を定義し、その指標を用いた系列化分析の手法を紹介するとともに、従来から用いられている系列化分析の手法である、片連結度分析法との差異を明らかにする。さらに、事例を通して提案手法の有効性についても考察する。

1 東京家政学院大学現代生活学部児童学科
2 國學院高等学校校長
3 早稲田大学名誉教授

2. ファジィグラフの構造解析

ファジィグラフ $G = (V, T)$ は、ノードの有限集合 $V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ と、ノード v_i からノード v_j への関連度を表す関連行列 $T = (t_{ij}) (0 \leq t_{ij} \leq 1)$ で表される。この関連度は、通常グラフにおいて、 v_i から v_j へのアーク ($v_i \rightarrow v_j$) として表される。よって、関連行列 T は、関連構造グラフ T と等価と考えることができる。

関連構造グラフ T に対して、近似アルゴリズムを用いて近似 N 値分析すると、近似 N 値グラフ T^* が得られる。また、関連行列 T に関して類似構造解析すると、ノード v_i とノード v_j の類似度を表す類似構造グラフ $S = (s_{ij})$ が得られる。ここで、類似構造グラフの中におけるノード v_i の重要度は以下のように定義されるファジィシャプレイ値 σ_i で測ることができる。

$$\sigma_i = \frac{\sum_j s_{ij}}{\sum_i \sum_j s_{ij}} \quad (1)$$

さらに、ファジィ類似構造グラフ S の推移包から分割樹形図 P が得られる。ただし、グラフ S の推移包は以下のように定義される。

$$\bigcup_k S^k = \widehat{S} = (\widehat{s}_{ij}) \quad (2)$$

ここで、近似 N 値グラフ T^* 、分割樹形図 P 、ファジィシャプレイ値 σ_i の情報を要約することで、関連構造グラフ T の全体の構造をかなり明確にすることができる評価グラフ ϕ が得られる。

3. ファジィグラフの連結構造解析

3-1 連結構造解析における系列化分析

ファジィグラフの構造解析において、残されている課題の1つに、連結構造解析における系列化分析がある。関連構造グラフ T は、有向グラフなのでノードの系列化（順序付け）が可能となるが、一般に全順序構造を持たないことが多い、つまり半順序構造をもつグラフである場合が多いの

で、ノード全体を系列化することが困難となる。ここで、ノードの集合 $V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ 上の2項関係 R に対して、 $(v_i, v_j) \in R$ を $v_i R v_j$ と記すとすると、 R が反射性を満たすとは、

$$\forall v \in V, v R v \quad (3)$$

R が反対称性を満たすとは、

$$\forall v_i, v_j \in V, v_i R v_j \wedge v_j R v_i \Rightarrow v_i = v_j \quad (4)$$

R が推移性を満たすとは、

$$\forall v_i, v_j, v_k \in V, v_i R v_j \wedge v_j R v_k \Rightarrow v_i R v_k \quad (5)$$

R が比較可能性を満たすとは、

$$\forall v_i, v_j \in V, v_i R v_j \vee v_j R v_i \quad (6)$$

であり、反射性・反対称性・推移性を満たすグラフを、半順序構造をもつグラフという。また、これらに加え比較可能性を満たすグラフを、全順序構造をもつグラフという。

系列化分析に関して、従来から広く用いられている手法は西田・竹田 (1978)³⁾ の片連結度分析である。

3-2 片連結度分析による系列化分析

関連行列 $T = (t_{ij})$ において、 α カット行列 T^α を以下のように定義する。

$$T^\alpha = (t_{ij}^\alpha), t_{ij}^\alpha = \begin{cases} 1, & t_{ij} \geq \alpha \\ 0, & t_{ij} < \alpha \end{cases} \quad (7)$$

また、ノードとアークが交互におりなす列を歩道とし、ノード v_i からノード v_j への歩道を ($v_i \rightarrow v_j$) とすると、片連結グラフは、

$$\forall v_i, v_j \in V, \exists v_i \rightarrow v_j \vee v_j \rightarrow v_i \quad (8)$$

をみたすグラフである。ここで、片連結グラフの

片連結度 $\mu(T)$ を、

$$\mu(T) = \min_{i,j} \left\{ \max \left\{ \widehat{t}_{ij}, \widehat{t}_{ji} \right\} \right\} \quad (9)$$

と定義し、 $\mu(T)$ カットグラフ $T^{\mu(T)}$ によって系列化分析を行う手法を片連結度分析という。

3-3 ファジィコアインデックス

関連構造グラフ T において、ノード v_j に対するノード v_i の重要度を、以下のように定義されるファジィコアインデックス c_{ij} で測る。

・ $t_{ij} \leq t_{ji}$ のとき、

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{t_{ji}}{t_{ij}}, \frac{t_{ji}}{t_{ij}} < 9 \\ 9 \frac{t_{ji}}{t_{ij}} \geq 9 \end{cases}, \quad c_{ji} = \frac{1}{c_{ij}} \quad (10)$$

・ $t_{ij} > t_{ji}$ のとき、

$$c_{ji} = \begin{cases} \frac{t_{ij}}{t_{ji}}, \frac{t_{ij}}{t_{ji}} < 9 \\ 9 \frac{t_{ij}}{t_{ji}} \geq 9 \end{cases}, \quad c_{ij} = \frac{1}{c_{ji}} \quad (11)$$

この指標は、主観ではなくデータから得られるものという点で、Saaty (1980)⁴⁾ が提案した階層化意思決定法 (Analytic Hierarchy Process) において用いられている一対比較値を補完する指標であるといえる。

3-4 ファジィコアインデックスを用いた系列化分析

ファジィコア行列 $C = (c_{ij})$ から、関連構造グラフの中におけるノード v_i の重要度を表すファジィコアバリュウ $c(v_i)$ を、以下のように定義する。

$$Cv = \lambda_{\max} v, v = (c(v_i)), \lambda_{\max} \geq n \quad (12)$$

ここで、 λ_{\max} はファジィコア行列 C の最大固

有値を表し、 v は λ_{\max} に対応する固有ベクトルを表す。

ここで、最大固有値および固有ベクトルに着目する理由を述べる。 $V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ において、関連構造グラフにおける、本来の v_i の重要度を w_i とする。このとき、ノード v_j に対するノード v_i の重要度の一対比較値 c^*_{ij} は、

$$c^*_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad (13)$$

という関係を満たすとする。これより、一対比較行列 $C^* = (c^*_{ij})$ は、

$$C^* = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる。ここで、(14) 式の右側から、

$$v^* = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \text{ をかけると、}$$

$$C^* v^* = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n v^* \quad (15)$$

が得られる。ここで、実際には未知の c^*_{ij} を c_{ij} で推定した結果、(12) 式を得ることになる。

4. 事例研究

関連構造行列 T (図2) からは、関連構造グラフ T (図3) が得られる。関連構造グラフ T に

対して近似分析および類似構造解析を行うことで、近似3値グラフ T^* (図4)、類似構造行列 S (図5)、および類似構造グラフ S (図6) が得られる。ここで、類似構造グラフ S 中における各ノード v_i の重要度をファジィシャプレイ値 σ_i で測った結果を、図5の右端に示す (FSV)。これにより、 $\sigma_1 = 0.179$ が最大値となることから、類似構造において、 v_1 が強化点となることが明らかとなる。さらに、類似構造グラフ S をクラスター分析した結果、分割樹形図 P (図7) が得られる。最後に、近似値3値グラフ T^* 、分割樹形図 P 、ファジィシャプレイ値 σ_i を要約することにより、評定グラフ ϕ (図8) が得られる。この評定グラフは、全体の構造をかなり明らかにしている。

ファジィグラフの連結構造解析における系列化分析に関して、評定グラフ ϕ を用いて系列化を試みると、 $v_3 \rightarrow \{v_1, v_6, v_5\} \rightarrow \{v_2, v_4\}$ のような半順序構造をもつ結果になる。意思決定を行う場合など、何らかの尺度により、半順序構造をもつグラフを全順序構造に変換することが望まれる場合も多く、より詳細な系列化分析が必要となる。従来から広く用いられてきた片連結度分析による系列化分析を行うと、片連結度 $\mu(T) = 0.73$ となるので、

0.73 カットグラフ $T^{0.73}$ を考えることにより、

$v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5 \rightarrow \{v_2, v_4\}$ のような、まだ半順序構造をもつ結果となる。ファジィコアインデックスを用いた系列化分析を行うと、関連構造行列 T からファジィコア行列 C (図9) が得られる。

(12) 式に従って、ファジィコアバリュー $c(v_i)$ を求めた結果を、図9の右端に示す (FCV)。これにより、 $v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4$ のような全順序構造をもつ結果を得る。

5. 考察

従来法では、ファジィグラフの連結構造を、片連結度のレベルで把握しているため、部分的な一対比較値を用いて系列化を行っていた。それに対

1	1.00	0.56	0.96	0.73	0.84
0.68	1	0.37	0.95	0.49	0.62
1.00	1.00	1	1.00	0.94	0.96
0.63	0.93	0.35	1	0.43	0.59
0.98	1.00	0.72	0.90	1	0.74
0.94	1.00	0.60	1.00	0.62	1

図2 関連構造行列 T

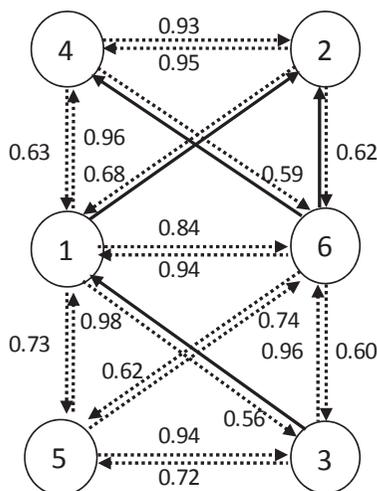


図3 関連構造グラフ T

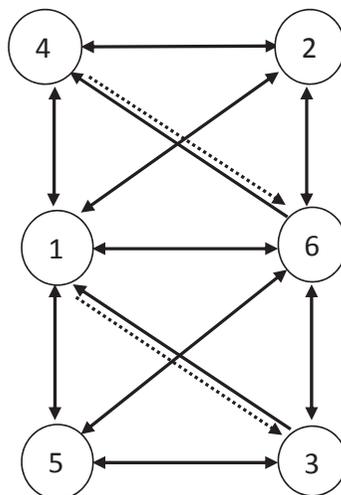


図4 近似値グラフ T^*

1	0.81	0.72	0.76	0.84	0.89	FSV
0.81	1	0.54	0.94	0.66	0.77	0.179
0.72	0.54	1	0.52	0.82	0.74	0.155
0.76	0.94	0.52	1	0.58	0.73	0.162
0.84	0.66	0.82	0.58	1	0.68	0.164
0.89	0.77	0.74	0.73	0.68	1	0.172

図5 類似構造行列 S

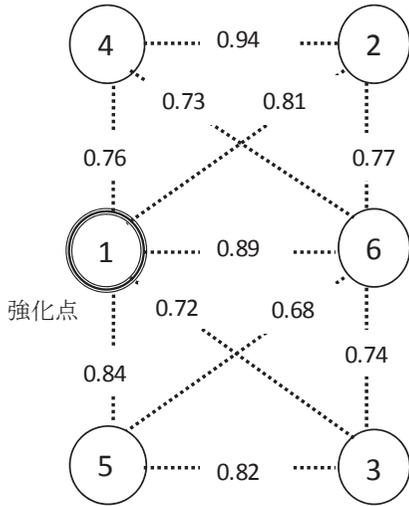


図6 類似構造グラフ S

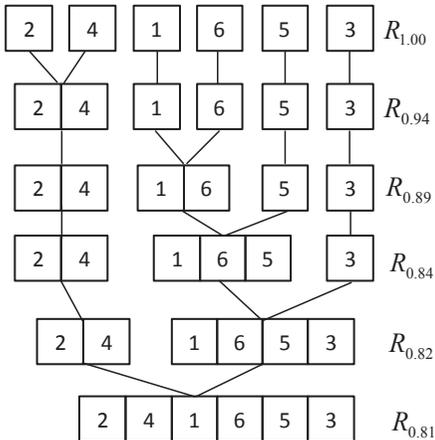


図7 分割樹形図 P

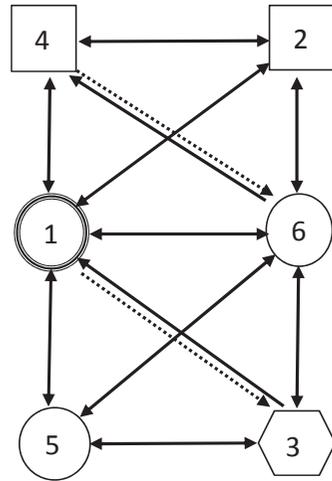


図8 評価グラフ ϕ

1	0.68	1.79	0.66	1.34	1.12	FCV
1.47	1	2.70	0.98	2.04	1.61	0.239
0.56	0.37	1	0.35	0.77	0.63	0.089
1.52	1.02	2.86	1	2.09	1.69	0.247
0.74	0.49	1.31	0.48	1	0.84	0.119
0.89	0.62	1.60	0.59	1.19	1	0.144

図9 ファジィコア行列 C

して、ファジィコアインデックスを系列化分析に応用することにより、ノード全体の関連度の情報を使って、ファジィコア行列を作成しているの、全てのノード間の一対比較値を考慮に入れた系列化を行っているといえる。その意味で、より詳細な系列化分析を行っているといえる。また、ファジィコアバリューは定量化されているので、ノードの系列化だけでなく、各ノードの重要度の比較が可能となる。さらに、提案手法を用いることで、図10のように、半順序構造をもつグラフを、全順序構造をもつものに一般に変換できるので、類似構造解析における強化点を把握できることに加えて、関連構造解析における発散核や集中核を把握することができる。

謝辞

本研究遂行にあたっては、平成27年度東京家政学院大学若手研究者研究費助成を頂いた。

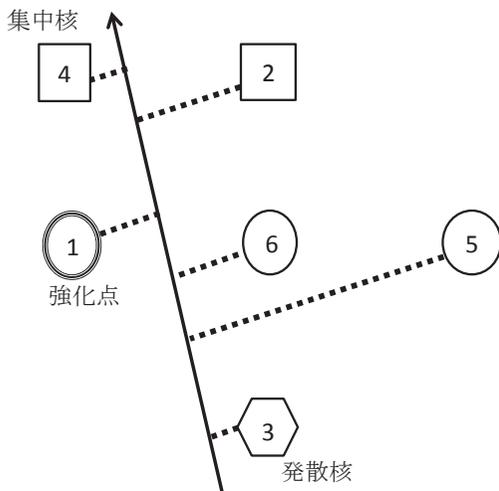


図 10 固有ベクトル上への射影のイメージ

引用文献

- 1) H.Yamashita:Approximation Algorithm of Fuzzy Graph and Its Application, Int'l Congress of Fuzzy System Association III, TH-5, 1989.
- 2) 津田栄, 山下元: シャプレイ値を応用したファジィソシオグラム分析, 第12回ファジィシステムシンポジウム, pp.717-720, 1996.
- 3) 西田俊夫, 竹田英二: ファジィ集合とその応用, 森北出版, 1978.
- 4) Saaty, T.L:The Analytic Hierarchy, Process, McGraw-

Hill, 1980.

参考文献

- 1) 木下栄蔵, 大野栄治: AHP とコンジョイント分析, 現代数学社, 2004.
- 2) K. Shinkai: Decision Method to Obtain the Optimal Number of Clusters in Hierarchical Fuzzy Cluster Analysis,Int'l Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences,Vol.16, No.1,pp.35-50,2010.
- 3) K. Motegi,K. Shinkai,and H. Yamashita: Fuzzy cluster analysis on international stock prices,The 3rd International Conference on Innovations in Bio-inspired Computing and Applications, pp. 34-38, 2012.
- 4) K. Motegi, K. Shinkai and H. Yamashita: Fuzzy Cluster Analysis Frequency on International Stock Prices: Domain Approach,In Proceedings of the Annual Conference of Biomedical Fuzzy Systems Association,pp. 185-189, 2012.
- 5) 加藤豊: 例解 AHP—基礎と応用—, ミネルヴァ書房, 2013.
- 6) K. Shinkai,E. Tsuda and H. Yamashita: Characteristic Analysis of Fuzzy Graph and its Application, In Proceedings of the Annual Conference of Biomedical Fuzzy Systems Association, pp.303-304, 2015.

(受付 2016.3.18 受理 2016.7.11)