# ファジィグラフの構造解析と応用Ⅱ
## —ソシオメトリー分析に焦点を当てて—

新海　公昭[1]　　津田　栄[2]　　山下　元[3]　　染山　教大[4]

ソシオメトリー分析における集団の成員の関連構造における二項関係は一般に半順序の構造を持つ。しかし、小学校現場で担任が用意する連絡網から会社の人事部や経営陣が作成する会社の組織図に至るまで、半順序ではなく全順序の順序構造が求められるものが多くある。これまで筆者等は、ファジィグラフにおける半順序構造を全順序構造に変換する系列化分析のフレームワークについて研究を進めてきた。本稿では、系列化分析の手法をソシオメトリー分析に応用するための分析法について提案し、その有効性についてシミュレーションを通して検証した。その結果、本分析法の小集団における系列化の有効性、推移律を仮定しないモデルにも適用できる広い適用範囲について確認した。

キーワード：ソシオメトリー分析　半順序構造　全順序構造　ファジィコアインデックス

### 1．はじめに

ソシオメトリーは、ヤコブ・モレノ[1)]により提唱された集団の成員の関連性の程度から集団構造を測定する手法である。津田ら[2)]は、ファジィグラフ理論を応用した類似構造分析や関連構造分析を適用した新しいソシオメトリー分析法を考案し、これにより集団の友好関係の構造や関連関係の構造を把握することが可能となった。残っている課題の1つが全順序構造の把握である。ここで、集団の成員の関連構造における二項関係は一般に全順序関係ではなく、半順序関係を持っている。成員の集合を $V=\{v_i | 1 \leq i \leq 3\}$ とし、成員 $v_i$ から $v_j$ 成員への関係をグラフで $v_i \rightarrow v_j$ で表すとき、図1は全順序構造を満たすグラフ、図2は半順序構造を満たすグラフを表している。

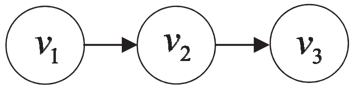


図1　全順序構造を満たすグラフの例

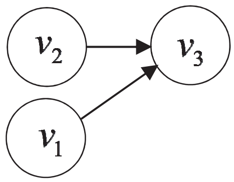


図2　半順序構造を満たすグラフの例

ここで、成員の集合 $V=\{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ 上の2項関係 $R$ に対して、$(v_i, v_j) \in R$ を $v_i R v_j$ と記すとすると、$R$ が反射性を満たすとは、

$$\forall v \in V,\ vRv \tag{1}$$

$R$ が反対称性を満たすとは、

1　東京家政学院大学現代生活学部児童学科
2　國學院高等学校学校長
3　早稲田大学名誉教授
4　日蓮宗運千山真養寺副住職

$$\forall v_i,\ v_j \in V,\ v_i R v_j \wedge v_j R v_i \Rightarrow v_i = v_j \quad (2)$$

$R$ が推移性を満たすとは、

$$\forall v_i,\ v_j, v_k \in V,\ v_i R v_j \wedge v_j R v_k \Rightarrow v_i R v_k \quad (3)$$

$R$ が比較可能性を満たすとは、

$$\forall v_i,\ v_j \in V,\ v_i R v_j \vee v_j R v_i \quad (4)$$

であり、反射性・反対称性・推移性を満たすグラフを、半順序構造をもつグラフという。また、これらに加え比較可能性を満たすグラフを、全順序構造をもつグラフという。さて、実務上の観点から考えると、小学校現場で担任の教師が用意するクラスの連絡網から会社の人事部や経営陣が作成する会社の組織図りに至るまで、半順序ではなく全順序の順序構造が求められるものが多くある。これまで筆者等は、ファジィグラフにおける半順序構造を全順序構造に変換する系列化分析のフレームワークについて研究を進めてきた。本稿では、系列化分析の手法をソシオメトリー分析に応用するための分析法について提案し、その有効性についてシミュレーションを通して検証する。

## 2．ファジィグラフの連結構造解析における系列化分析

### 2－1　ファジィコアインデックス

ファジィグラフ $G=(V,\ T)$ は、ノードの有限集合 $V=\{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ と、ノード $v_i$ からノード $v_j$ への関連度を表すファジィ関連行列 $T=(t_{ij})$　$(0 \leq t_{ij} \leq 1)$ で表される。ファジィ関連行列 $T$ において、ノード $v_j$ に対するノード $v_i$ の重要度を、以下のように定義されるファジィコアインデックス $c_{ij}$ で測る：

・ $t_{ij} \leq t_{ji}$ のとき、

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{t_{ji}}{t_{ij}}, & \dfrac{t_{ji}}{t_{ij}} < 9 \\ 9, & \dfrac{t_{ji}}{t_{ij}} \geq 9 \end{cases},\ c_{ji} = \frac{1}{c_{ij}} \quad (5)$$

・ $t_{ij} \leq t_{ji}$ のとき、

$$c_{ji} = \begin{cases} \dfrac{t_{ij}}{t_{ji}}, & \dfrac{t_{ij}}{t_{ji}} < 9 \\ 9, & \dfrac{t_{ij}}{t_{ji}} \geq 9 \end{cases},\ c_{ij} = \frac{1}{c_{ji}} \quad (6)$$

### 2－2　ファジィコアインデックス分析法

ファジィコア行列 $C=(c_{ij})$ から、ファジィグラフの中におけるノード $v_i$ の重要度を表すファジィコアバリュー（以後､FCV と表記） $c(v_i)$ を、以下のように定義する .

$$Cv = \lambda_{\max} v,\ v = (c(v_i)) \quad (7)$$

ここで、 $\lambda_{\max}$ はファジィコア行列 $C$ の最大固有値を表し、 $v$ は $\lambda_{\max}$ に対応する固有ベクトルを表す。これにより、ノード $v_i$ の系列化が可能となり、グラフの全順序構造を明らかにすることができる。

## 3．ソシオメトリー分析における系列化分析

まず、 $M$ 人の集団の成員 $\{v_i | 1 \leq i \leq M\}$ を対象に、 $N$ 個の質問項目 $\{Q_p | 1 \leq p \leq N\}$ において、成員を優先順位の高い者から記していくようなアンケートを行う。成員 $v_i$ が質問項目 $Q_p$ について成員 $v_j$ を選ぶ時、その順位 $k_{ij}^{(p)}(1 \leq k_{ij}^{(p)} < M)$ から、成員 $v_i$ の $v_j$ に対する評定値 $r_{ij}$ を求めると、評定行列 $R=(r_{ij})$ が得られる：

$$r_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{N}(n - k_{ij}^{(p)} + 1),\ n = \left[\frac{\sum_{i=1}^{M} n_i}{MN} + 0.5\right] (i \neq j). \\ nN\ (i = j) \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 $n_i$ は成員が $v_i$ アンケートの各項目で選んだ成員ののべ人数、［　］はガウス記号とする。また、全 $N$ 項目において成員 $v_i$ が成員 $v_j$ を選ばないとき、 $r_{ij}=0$ とする。

次に、

$$t'_{ij} = \frac{r_{ij}}{nN} \tag{9}$$

により、成員 $v_i$ の成員 $v_j$ への選好度を表す選好行列 $T' = (t'_{ij})$ を定義し、

$$t_{ij} = 0.8t'_{ij} + 0.1 \tag{10}$$

（ただし、 ${t'_{ij}}^2 + {t'_{ji}}^2 = 0$ のときは $t_{ij} = t_{ji} = 0$ ）で得られる選好変換行列 $T = (t_{ij})$ を基にして、選好性の観点からみた、成員 $v_i$ の成員 $v_j$ に対する重要度を表すファジィコアインデックス $c_{ij}$ を

$$c_{ij} = \frac{t_{ji}}{t_{ij}}, c_{ji} = \frac{1}{c_{ij}} \tag{11}$$

（ただし、 ${t'_{ij}}^2 + {t'_{ji}}^2 = 0$ のときは $c_{ij} = c_{ji} = 0$ ）で測定する。ここで、一般に選好グラフ $T' = (t'_{ij})$ の推移閉包である選好構造グラフ $\hat{T}' = \bigcup_{q\geq 1}$ は半順序の順序構造をもつ。

最後に、ファジィコアインデックス分析法を適用することで、選好性の観点からみた成員 $v_i$ の重要度を表すファジィコアバリュー $c(v_i)$ が得られる。これによりメンバーの全順序構造を明らかにし、メンバーを系列化することができる。なお、提案手法は、一般に分析対象にしない $T$ が二項関係において推移性を満たさないモデル（例えば三つ巴）も分析が可能であるため、広い適用範囲を持っている手法と言える。

## 4．ソシオメトリー分析における系列化のシミュレーション

小学生を対象にして、3人の成員 $\{v_1, v_2, v_3\}$ に図3のような2項目の質問項目をもつアンケートを行った結果が、図4のように整理されたとする。

次のそれぞれの場合に、同じグループになりたい人を順に書きなさい。

Q1:一緒に勉強をするとき
Q2:昼食を食べるとき

| | 1番 | 2番 |
|---|---|---|
| Q1 | | |
| Q2 | | |

図3　アンケート用紙

| | | 1番 | 2番 |
|---|---|---|---|
| v1 | Q1 | v3 | v2 |
| | Q2 | v3 | v2 |
| v2 | Q1 | v3 | |
| | Q2 | v3 | v1 |
| v3 | Q1 | | v2 |
| | Q2 | v2 | |

図4　アンケートの回答結果

これにより、評定行列 $R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$、選好行列

$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.25 & 1 & 1 \\ 0 & 0.75 & 1 \end{pmatrix}$、選好変換行列

$T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.9 \\ 0.3 & 0.9 & 0.9 \\ 0.1 & 0.7 & 0.9 \end{pmatrix}$ およびファジィコア行列

$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{7}{9} \\ 9 & \frac{9}{7} & 1 \end{pmatrix}$ を得る。また、選好グラフ $T'$ は図5のようになり、その推移閉包である選好構造グラフ $\hat{T}'$ は図6のようになる。

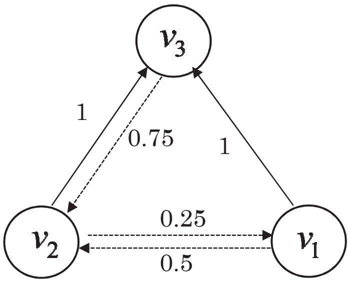


図 5　選好グラフ $T'$

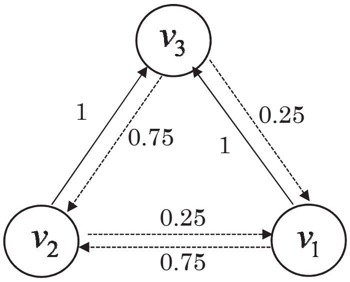


図 6　選好構造グラフ $\hat{T}'$

$C$ にファジィコアインデックス分析法を適用することで、最大固有値 $\lambda_{\max}=3.2323$ に対応した固有ベクトルから各成員の重要度を表すファジィコアバリュー

$$c(v_1)=0.17927, c(v_2)=0.482065, c(v_3)=1$$

を得る。これより、成員を重要度について昇順に並べると、図 7 のように、 $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ と系列化され全順序構造が得られる。

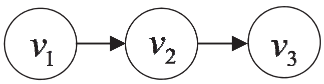


図 7　全順序構造をもつグラフ

## 5．考察

本稿では、ファジィコアインデックス分析法を用いた系列化分析の手法を応用して、ソシオメトリー分析の結果通常得られる半順序構造をもつグラフを全順序構造をもつグラフに変換する分析法を提案した。その結果、提案手法の小集団における系列化の有効性、推移律を仮定しないモデルにも適用できる広い適用範囲について確認した。

## 謝辞

本研究遂行にあたっては，平成 30 年度東京家政学院大学若手研究者研究費助成を頂いた。

## 引用・参考文献

1） J. Moreno：The Sociometry Reader, Free Press, 1960.
2） 津田 栄, 山下 元：シャプレイ値を応用したファジィソシオグラム分析, 第 12 回ファジィシステムシンポジウム, pp.717- 720, 1996.
3） 山下 元, 瀧澤武信, 他：ファジィ理論 基礎と応用, 共立出版, 2010.
4） 保田直美：小学校の学級活動で用いられる技術の変遷, 佛教大学教育学部学会紀要, 第 15 号, pp.37-55, 2016.
5） K. Shinkai, E. Tsuda and H. Yamashita: Structure Analysis of Fuzzy Graph and Its Application, An International Journal of Research and Surveys, vol.12, no.5, pp.425-432, 2018.

（受付　2019.3.13　受理　2019.6.6）